Resume

PENGANTAR ANALISIS REAL

Untuk Memenuhi Tugas Mata Kuliah Pengantar Analisi Real

Disusun Oleh:

M. ADIB JAUHARI D. P (08610009)

MUHTAR SAFI'I (08610013)

BOWO KRISTANTO (08610014)

ANA MARDIATUS S (08610015)

OKTA ARFIYANTA (08610016)

ROSSI FAUZI (08610017)

RENI DWY L (08610019)

IFTI MUSYARIFAH (08610020)

PRODI MATEMATIKA

FAKULTAS SAIN DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2011

Integral Riemann

1. Pengertian

Telah diketahui bahwa jika fungsi $f : [a, b] \to \Re$ terbatas dan P partisi pada $[a,b]$, maka berakibat :

$$L(f;\ P) \leq S(f;\ P) \leq U(f;\ P)$$

G.F.B. Riemann menggunakan $S(f,\ P)$ unuk menyusun integralnya.

Definisi 1.1.1 (***Integral Riemann*** **)**

Fungsi $f : [a, b] \to \Re$ dikatakan **terintegral Riemann** *(Rienmann integrable)* pada $[a, b]$ jika ada bilangan A sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $P = \{ a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ partisi $[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berakibat :

$$|\mathrm{A} - \mathrm{S}(f;\ \mathrm{P})| = \left| A - \sum_{i=1}^{n} f\ (x_i^*)\Delta_{\mathrm{i}}\mathrm{x} \right| < \varepsilon$$

A disebut **nilai integral Riemann** fungsi f pada $[a, b]$.

Perlu diingat bahwa pengambilan $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ sebarang dan $\|P\|$ = maks $\{\Delta_i x_i\ i = 1,2,\ldots,n\}$. Selanjutnya, menurut <u>*Definisi 1.1.1*</u>, fungsi f terintegral Riemann pada $[a, b]$ jika dan hanya jika

$$\lim_{\|P\|\to 0}(S, P) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum f\ (x_i^*)\Delta_i\, x = A$$

Contoh : Diberikan fungsi f (x)= x dengan $2 \leq x \leq 6$. Akan dihitung $\int_2^6 x\, dx$ dengan menggunakan definisi integral tertentu.

Partisi interval [2, 6] menjadi n subinterval dengan menggunakan partisi $2 = \mathrm{x}_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = 6$ dengan $2 = \mathrm{x}_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 6$. Diperoleh subinterval $[2 = \mathrm{x}_0, x_1]$, $[\mathrm{x}_1, x_2]$, …$[\mathrm{x}_{i-1}, x_i]$, …,$[\mathrm{x}_{n-1}, x_n = 6]$. Panjang masing-masing subinterval dibuat sama yaitu $\Delta x_i = \frac{6-2}{n} = \frac{4}{n}$, i=1,2,…,n. Diambil titik x_i^* dengan $x_i^* = x_1$ i=1,2,…,n. dan dibentuk jumlahan.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f\ (x_i^*)\,\Delta x_i &= f\ (x_1^*)\Delta x_1 + \cdots + f\ (x_n^*)\Delta x_n \\
&= f\ (x_1)\Delta x_1 + \cdots + f\ (x_n)\Delta x_n \\
&= x_1\Delta x_1 + x_2\Delta x_2 + \cdots + x_n\Delta x_n \\
&= \left(2 + \frac{4}{n}\right)\frac{4}{n} + \left(2 + 2\frac{4}{n}\right)\frac{4}{n} + \cdots + \left(2 + n\frac{4}{n}\right)\frac{4}{n} \\
&= \frac{4}{n}\left[\left(2 + \frac{4}{n}\right) + \left(2 + 2\frac{4}{n}\right) + \cdots + \left(2 + n\frac{4}{n}\right)\right] \\
&= \frac{4}{r}2\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \left(1 + 2\frac{2}{n}\right) + \cdots + \left(1 + n\frac{2}{n}\right)\right] \\
&= \frac{8}{n}\left[n + (1 + 2 + \cdots + n)\frac{2}{n}\right]
\end{aligned}$$

$= \frac{8}{n}\left[n + \frac{n(n+1)}{2}\frac{2}{n}\right]$

$= \frac{8}{n}[2n+1]$

$= \frac{16n+8}{n}$

Sehingga

$$\int_2^6 x\,dx \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \frac{16n-8}{n} = 16$$

Definisi 1.1.2

Diberikan $\hat{p}$ dan p partisi pada $[a, b]$. Partisi $\hat{p}$ disebut penghalus dari p jika $p \subseteq \hat{p}$

Contoh : Diberikan interval $I = [0, 1]$.barikut ini adalah partisi pada I .

$P_1 = \{0, \frac{1}{4}, 1\}$, $P_2 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$, $P_3 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\}$, $P_4 = \{0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, 1\}$, $P_5 = \{0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, 1\}$. Dapat dihitung bahwa $\| P_1 \| = \frac{3}{4}$, $\| P_2 \| = \frac{1}{2}$, $\| P_3 \| = \frac{1}{4}$. P_5 merupakan penghalus dari P_3 sebab $P_3 \subseteq P_5$, tetapi P_5 bukan penghalus dari P_2 maupun P_4 sebab $P_2 \not\subset P_5$ dan $P_4 \not\subset P_5$.

Definisi 1.1.3

Diberikan fungsi $f : [a, b] \to \Re$ terbatas dan partisi p pada $[a, b]$.

- **Jumlahan Riemann atas** fungsi f terhadap partisi p ditulis $U(f\,;\,P)$ didefinisikan sebagai $U(f\,;\,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i.\Delta x_i$.
- **Jumlahan Riemann tengah** fungsi f terhadap partisi p ditulis $S(f\,;\,P)$ didefinisikan sebagai $S(f\,;\,P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).\Delta x_i$.
- **Jumlahan Riemann bawah** fungsi f terhadap partisi p ditulis $L(f\,;\,P)$ didefinisikan sebagai $L(f\,;\,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i.\nabla x_i$.

Contoh :

Diberikan $f(x) = \begin{cases} x+2\ , & -2 \le x < 0 \\ 0\ , & x = 1 \\ -x\ , & 0 < x \le 1 \\ x^2 - 2\ , & 1 < x \le 3 \end{cases}$ dan partisi P = {-2 , 0 , 1 , 3}

Hitung : $U(f\,;\,P)$ dan $L(f\,;\,P)$?

Jawab :

$M_1 = \sup\{ f(x) \mid x_0 \le x \le x_1 \} = \sup\{ f(x) \mid -2 \le x \le 0 \} = \sup\{ 0 \mid -2 \le x \le 0 \} = 0$

$M_2 = \sup\{ f(x) \mid x_1 \leq x \leq x_2 \} = \sup\{ f(x) \mid 0 \leq x \leq 1 \} = \sup\{ -x \mid 0 \leq x \leq 1 \} = -1$

$M_2 = \sup\{ f(x) \mid x_2 \leq x \leq x_3 \} = \sup\{ f(x) \mid 1 \leq x \leq 3 \} = \sup\{ x^2 - 2 \mid 1 \leq x \leq 3 \} = 7$

Sehingga $U(f\,;\,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i.\Delta x_i.$

$= \sum_{i=1}^{3} M_i.\Delta x_i$

$= M_1.\Delta x_1 + M_2.\Delta x_2 + M_3.\Delta x_3$

$= 2(0 - 1 + 7)$

$= 12$

$m_1 = \inf\{ f(x) \mid x_0 \leq x \leq x_1 \} = \inf\{ f(x) \mid -2 \leq x \leq 0 \} = \inf\{ x + 2 \mid -2 \leq x \leq 0 \} = 0$

$m_2 = \inf\{ f(x) \mid x_1 \leq x \leq x_2 \} = \inf\{ f(x) \mid 0 \leq x \leq 1 \} = \inf\{0 \mid 0 \leq x \leq 1 \} = 0$

$m_2 = \inf\{ f(x) \mid x_2 \leq x \leq x_3 \} = \inf\{ f(x) \mid 1 \leq x \leq 3 \} = \inf\{ -x \mid 1 \leq x \leq 3 \} = -1$

Sehingga $L(f\,;\,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i.\Delta x_i.$

$= \sum_{i=1}^{3} m_i.\Delta x_i$

$= m_1.\Delta x_1 + m_2.\Delta x_2 + m_3.\Delta x_3$

$= 2(0 + 0 - 1)$

$= -2$

Teorema 1.1.4

Diberikan fungsi $f : [a, b] \to \Re$ terbatas. Untuk setiap partisi p pada $[a, b]$ berlaku $m(b-a) \leq L(f\,;\,P) \leq S(f\,;\,P) \leq U(f\,;\,P) \leq M(b-a)$.

Bukti :

Dari lemma didapat $m.\Delta x_i \leq m_i.\Delta x_i \leq f(x_i^*).\Delta x_i \leq M_i.\Delta x_i \leq M.\Delta x_i$, $\forall_i$. Jika hasil ini dijumlahkan maka akan didapat

$\sum_{i=1}^{n} m.\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i.\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i.\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M.\Delta x_i$ ....(*)

$\sum_{i=1}^{n} m.\Delta x_i = m\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = m((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots\ldots + (x_n - x_{n-1}))$

$= m(x_n - x_0) = m(b-a)$

Dari (*) didapat $m(b-a) \leq L(f\,;\,P) \leq S(f\,;\,P) \leq U(f\,;\,P) \leq M(b-a)$.

Misalkan dibentuk π ={P| P partisi pada [a, b]} maka dari *teorema 1.1.4* didapat $L(f\ ;\ P) \leq M(b-a)$, $\forall\ P \in \pi$ dan $U(f\ ;\ P) \geq m(b-a)$, $\forall\ P \in \pi$. Oleh karena $\{L(f\ ;\ P)\ |\ P \in \pi\}$ terbatas ke atas maka $sup_{p\ \epsilon\ \pi}\ L(f,\ P)$ ada, dan karena $\{U(f,P)\ |\ P \in \pi\}$ terbatas ke bawah maka $inf_{p\ \epsilon\ \pi}\ L(f,\ P)$ ada.

Definisi 1.1.5

- **Integral Riemann bawah** fungsi f ditulis $\int_{-a}^{b} f(x)dx$ didefinisikan sebagai $\int_{-a}^{b} f(x)dx = sup_{p\ \epsilon\ \pi}\ L(f,\ P) = sup_{p\ \epsilon\ \pi}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i.\Delta x_i\right)$.
- **Integral Riemann atas** fungsi f ditulis $\int_{a}^{-b} f(x)dx$ didefinisikan sebagai $\int_{a}^{-b} f(x)dx = inf_{p\ \epsilon\ \pi}\ L(f,\ P) = inf_{p\ \epsilon\ \pi}\left(\sum_{i=1}^{n} M_i.\Delta x_i\right)$.
- Fungsi f dikatakan **terintegral Riemann** pada [a, b] jika $\int_{-a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{-b} f(x)dx$

Notasi : f : [a, b].

Nilai integralnya : $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{-b} f(x)dx$

Contoh :

1. Diberikan fungsi $f(x) = c$, c konstanta. Apakah $f \in \Re[a, b]$? jika ya, tentukan nilainya.

Untuk sebarang partisi $p \in \pi$ didapat $m_i = c$, $M_i = c$, $\forall_i$.

$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M.\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c.\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a)$, dan

$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m.\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c.\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a)$, maka

$\int_{-a}^{b} f(x)dx = sup_{p\ \epsilon\ \pi}\ L(f,\ P) = sup_{p\ \epsilon\ \pi}\{c(b-a)\} = c(b-a)$, dan

$\int_{a}^{-b} f(x)dx = inf_{p\ \epsilon\ \pi}\ U(f,\ P) = inf_{p\ \epsilon\ \pi}\{c(b-a)\} = c(b-a)$.

Jadi $\int_{-a}^{b} f(x)dx = \int_{-a}^{b} f(x)dx = c(b-a)$, sehingga $f \in \Re[a, b]$ dan $\int_{a}^{b} f(x)dx = c(b-a)$.

2. Diberikan fungsi $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \cap [a,\ b] \\ 0, & x \in (\Re - Q) \cap [a,\ b] \end{cases}$

Apakah $g \in \Re[a, b]$? jika ya, tentukan nilainya.

Ambil sebarang partisi P pada [a, b]. Oleh karena itu sub interval $[x_{i-1}, x_i]$, i = 1, 2, 3,...., n memuat bilangan rasional dan irrasional maka $m_i = 0$, $M_i = 1$, $\forall_i$.

$\int_{-a}^{b} g(x)dx = sup_{p\ \epsilon\ \pi}\ L(g,\ P) = sup_{p\ \epsilon\ \pi}\{0\} = 0$, dan

$\int_{a}^{-b} g(x)dx = inf_{p\ \epsilon\ \pi}\ U(g,\ P) = inf_{p\ \epsilon\ \pi}\{(b-a)\} = (b-a)$.

Oleh karena $\int_{-a}^{b} g(x)dx \neq \int_{a}^{-b} g(x)dx$ maka $g \notin \Re[a, b]$.

Teorema 1.1.6

Jika f terintegral Riemann pada $[a, b]$, maka nilai integralnya tunggal.

Bukti: Jika A_1 dan A_2 nilai integral Riemann fngsi f pada $[a, b]$, maka untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$ sehingga jika $P_1 = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$dan $P_2 = \{ a = y_0, y_1, \ldots, y_n = b\}$ partisi pada $[a, b]$ dengan $\|P_1\| < \delta_1$ dan $\|P_2\| < \delta_2$, berturut-turut berakibat :

$$\left|A_1 - \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i^*)\Delta_i x\right| < \frac{\varepsilon}{3}\ dan\ \left|A_2 - \sum_{k=1}^{m} f\,(y_k^*)\Delta_k y\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Diambil $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, partisi $P = \{a = z_0, z_1, \ldots, z_n = b\}$ dengan $\|P\| < \delta$, dan $z_i^* \in [z_{i-1}, z_i]$. Karena $\|P\| < \delta_i$(i = 1, 2), maka diperoleh:

$$|A_1 - A_2| \leq \left|A_1 - \sum_{i=1}^{\delta} f\,(x_i^*)\Delta_i z\right| + \left|\sum_{i=1}^{\delta} f\,(x_i^*)\Delta_i z - A_2\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Yang berarti $A_1 = A_2$ dan bukti selesai. ■

Menurut _Definisi 1.1.1_ dan _Teorema 1.1.6_, jika fungsi f terintegral Riemann pada $[a, b]$ dengan nilai integral Riemannnya A, yang biasa ditulis dengan $\boxed{A = (R)\int_a^b f = (R)\int_a^b f(x)\,dx}$ tunggal.

Teorema 1.1.7

Jika fungsi $f : [a, b] \to \Re$ terintegral Riemann pada $[a, b]$, maka f terbatas pada $[a, b]$.

Bukti : Andaikan fungsi f tak terbatas ke atas pada [a,b], maka untuk setiap bilangan asli n terdapat $t_n \in [a, b]$ sehingga $f(t_n) > n$.

Untuk setiap partisi $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$, tentu $t_n \in [x_{k-1}, x_k]$ untuk suatu k dan oleh karena itu himpunan

$$S(f) = \{S(f; P); P \in \pi[\mathrm{a, b}]\}$$

tak terbatas ke atas sebab x_k^* dapat dipilih samama denagn t_n jika $t_n \in [x_{k-1}, x_k]$

Hal ini berarti

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(f; P) = +\infty$$

(tak ada) yang dengan kata lain funsi f tak terintegral Riemann pada $[a, b]$. Bukti sejalan, apabila diandaikan f tak terbatas ke bawah. ■

Teorema 1.1.8 (Kriteria Cauchy)

Diketahui fungsi $f : [a, b] \to \Re$ terbatas. Fungsi f terintegral Riemann pada $[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika P_1 dan P_2 partisi pada $[a, b]$ dengan $\|P_1\| < \delta$ dan $\|P_2\| < \delta$ berakibat

$$|S(f\ ;\ P_1) - S(f\ ;\ P_2)| < \varepsilon$$

Bukti : Syarat perlu : Jika f terintegral Riemann pada $[a, b]$, maka ada bilangan A sehingga setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika P partisi pada $[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berakibat

$$|S(f\ ; P) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Diambil sebarang dua partisi P_1 dan P_2 pada $[a, b]$ dengan $\|P_1\| < \delta$ dan $\|P_2\| < \delta$. Diperoleh

$$|S(f\ ;\ P_1) - S(f\ ;\ P_2)| \leq |S(f\ ;\ P_1) - A| + |A - S(f\ ;\ P_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Syarat cukup : Menurut yang diketahui untuk bilangan 1 terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika P_1 dan P_2 masing-masing partisi pada $[a, b]$ dengan $\|P_1\| < \delta$ dan $\|P_2\| < \delta$ berakibat

$$|S(f\ ;\ P_1) - S(f\ ;\ P_2)| < 1$$

Tulis π sebagai koleksi semua partisi P pada $[a, b]$ dengan

$$\|P\| < \delta$$

Untuk setiap $P \in \pi$. Diambil $P_0 \in \pi$ tetap untuk setiap $P \in \pi$ diperoleh

$$|S(f\ ; P) - S(f\ ;\ P_0)| < 1$$

Atau

$$S(f\,; P_0) - 1 < S(f\,; P) < S(f\,; P_0) + 1$$

Jadi, himpunan bilangan nyata

$$S(f) = \{S(f\,; P)\ ;\ P \in \pi\}$$

terbatas. Jika anggota $S(f)$ banyaknya hingga, maka f merupakan fungsi tangga dan oleh karena itu f terintegral Riemann pada $[a, b]$. Jika fungsi f bukan fungsi tangga, maka $S(f)$ merupakan himpunan bilangan terbatas yang banyak anggotanya tak hingga. Menurut *teorema Bolzano-Weiertstrass*, $S(f)$ mempunyai paling sedikit satu titik limit, namakan titik limit itu A. Hal ini berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $P \in \pi$, $S(f\,; P) \in S(f)$, sehingga

$$|A - S(f\ ; P)| < \varepsilon$$

Dengan kata lain terbukti fungsi f teintegral Riemann pada $[a, b]$.

Teorema 1.1.9

Fungsi f terintegral Riemann jika dan hanya jika f terintegral Darboux pada selang tertutup yang sama. Lebih lanjut

$$(\mathrm{R}) \int_a^b f = (\mathrm{D}) \int_a^b f$$

Bukti : Syarat perlu : Jika fungsi f terintegral Riemann pada [a, b], maka f ada bilangan A = (R)$\int_a^b f$ sehingga untuk setiap bilangan ε > 0 terdapat bilangan δ > 0 dan jika $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$ partisi pada [a, b] dengan $\|P\| < \delta$ berakibat

$$|A - S(f\,;P)| = \left|A - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i x\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Atau

$$A - \frac{\varepsilon}{3} < S(f\ \ ;P) < A + \frac{\varepsilon}{3}$$

Perlu diingat bahwa pemilihan $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ sebarang. Karena

$$m_i = inf\{ f(x)\,;x \in [x_{i-1}, x_i]\} \text{ dan}$$

$$M_i = sup\{ f(x)\,;x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

ada, maka untuk setiap i (i = 1, 2, ..., n) dapat dipilih $x_1{}'$, $x_i{}''$ $\in [x_{i-1}, x_i]$ sehingga

$$F(x'_i) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} < m_i \quad \text{dan} \quad M_i < f(x''_i) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Setelah dikalikan dengan $\Delta_i x$ kemudian dijumlah, diperoleh

$$S(f\,;P) - \frac{\varepsilon}{3} < L(f\,;P)\ dan\ U(f\,;P) < S(f\,;P) + \frac{\varepsilon}{3}$$

Oleh karena itu

$$S(f\,;P) - \frac{\varepsilon}{3} < L(f\,;P) \le U(f\,;P) < S(f\,;P) + \frac{\varepsilon}{3}$$

Yang berakibat

$$U(f\,;P) - L(f\,;P) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Atau fungsi f terintegral Darboux pada [a, b]

Syarat cukup : Karena f terintegral Darboux pada selang [a, b], maka untuk bilangan ε > 0 terdapat partisi P pada [a, b] sehingga berlaku

$$U(f\,;P) - L(f\,;P) < \varepsilon$$

Tetapi telah diketahui bahwa

$$L(f;P) \leq (D)\int_a^b f \leq U(f;P) \text{ dan } L(f;P) \leq S(f;P) \leq U(f;P)$$

Berdasarkan tiga ketidaksamaan terakhir dapat disimpulkan bahwa

$$\left|(D)\int_a^b f - S(f;P)\right| < \varepsilon$$

Yang berarti bahwa fungsi f terintegral Riemann pada $[a, b]$ dan $(\Re)\int_a^b f = A = (D)\int_a^b f$. ■

Teorema 1.1.10

$\Re[a, b]$ merupakan ruang linear, *i.e.*, untuk setiap $\alpha \in \Re$ dan $f, g \in [a, b]$ berakibat αf, $f + g \in \Re[a,b]$. Lebih lanjut

i. $\int_a^b \alpha . f = \alpha . \int_a^b f$

ii. $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

Bukti : Karena $f, g \in \Re[a, b]$, maka menurut <u>*Teorema 1.1.7*</u>., fungsi f dan fungsi g masing- masing terbatas pada $[a, b]$. Namakan

$$M_f = sup\,\{|f(x)|; x \in [a,b]\},\ M_g = sup\,\{|g(x)|; x \in [a,b]\}$$

Dan

$$M = \text{maks}\,\{|\alpha|, M_f, M_g, 1\}$$

Karena $f, g \in \Re[a,b]$, maka untuk bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika P partisi pada $[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berakibat

$$\left|\int_a^b f - S(f;P)\right| < \frac{\varepsilon}{M+1} \text{ dan } \left|\int_a^b g - S(f;P)\right| < \frac{\varepsilon}{M+1}$$

Selanjutnya, diperoleh

(i) $\left|\alpha . \int_a^b f - S(\alpha f;P)\right| = \left|\alpha . \int_a^b f - \alpha .\ S(f;P)\right| = |\alpha| \left|\int_a^b f - D(f;P)\right| < |\alpha|\frac{\varepsilon}{M+1} < \varepsilon$

Dengan kata lain, terbukti bahwa $\alpha f \in [a,b]$ dan

$$\int_a^b \alpha . f = \alpha . \int_a^b f. \ ■$$

(ii) $\left|\left(\int_a^b f + \int_a^b g\right) - S\,(f+g;P)\right|$

$= \left|\int_a^b f + \int_a^b g - \left(S(f;P) + S(g;P)\right)\right|$

$< \left|\int_a^b f - S(f;P)\right| + \left|\int_a^b g - S(g;P)\right|$

$< \frac{\varepsilon}{M+1} + \frac{\varepsilon}{M+1} < 2\,\varepsilon.$

Dengan kata lain, terbukti bahwa $f + g \in [a,b]$ dan

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g. \quad ■$$

Jika fungsi f terbatas dan $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$, kecuali di beberapa titik, maka fungsi f terintegral dan

$$\int_a^b f = 0$$

Dengan menggunkan hasil tersebut akan dibuktikan teorema dibawah ini.

Teorema 1.1.11

Jika $f \in [a,b]$, fungsi g terbatas pada $[a, b]$, dan $g(x) = f(x)$ kecuali di beberapa titik, maka $g \in [a,b]$ dan

$$\int_a^b g = \int_a^b f .$$

Bukti : Karena fungsi g terbatas pada $[a, b]$ dan $g(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$ kecuali dibeberapa titik, maka fungsi $h = f - g$ mempunyai sifat terbatas pada $[a, b]$ dan $h(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$, kecuali dibeberapa titik. Oleh karena itu fungsi h terintegral dan

$$\int_a^b h = 0 \Leftrightarrow \int_a^b (f-g) = \int_a^b f - \int_a^b g = 0 \Leftrightarrow \int_a^b g = \int_a^b f . \blacksquare$$

Contoh : Diberikan fungsi $f(x) = g(x)$ dengan a $\leq x \leq$ b. Akan ditunjukkan bahwa

$\int_a^b g = \int_a^b f$.

Bukti : Misal h(x) = f(x) – g(x) sehingga

$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b 0dx$

$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = 0$

$(\sum_{i=1}^n (f(x_i *) - g(x_i *)) \,.\, \Delta x_i) = 0$

$(\sum_{i=1}^n f(x_i *) \,.\, \Delta x_i) - (\sum_{i=1}^n g(x_i *) \,.\, \Delta x_i) = 0$

$(\sum_{i=1}^n f(x_i *) \,.\, \Delta x_i) = (\sum_{i=1}^n g(x_i *) \,.\, \Delta x_i)$

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

Teorema 1.1.12

Jika $f \in [a,b]$ dan $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$, maka

$$\int_a^b f \geq 0.$$

Bukti : Karena $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$ dan $f \in \Re[a, b]$, maka untuk setiap partisi $P = [a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b]$ pada $[a, b]$ diperoleh

$$0 \leq m(b-a) \leq L(f;P) \leq S(f;P) \leq U(f;P) \leq M(b-a)$$

dengan

$$m = inf\{f(x); x \in [a,b]\} \text{ dan } M = sup\{f(x); x \in [a,b]\}$$

Hal ini berakibat

$$0 \leq lim_{\|P\| \to 0}(S;P) = \int_a^b f. \blacksquare$$

Teorema 1.1.13

Jika $f, g \in \Re[a, b]$ dan $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Bukti : Dibentuk fungsi $h = g - f$. Mudah difahami bahwa $h \in \Re[a, b]$ dan $h(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Menurut *teorema 1.1.12* diperoleh

$$0 \leq \int_a^b h = \int_a^b (g - f) = \int_a^b g - \int_a^b f$$

atau terbukti

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g. \blacksquare$$

Teorema 1.1.14

Diberikan $I = [a, b]$, $c \in I$, dan $f : I \to \Re$ terbatas. $f \in \Re[a, b]$ jika dan hanya jika $f \in \Re[a, c]$ dan $f \in \Re[c, b]$ dalam hal ini

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Bukti : Syarat perlu : Karena $f \in \Re[a, b]$ maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P pada $[a, b]$ sehingga :

$$U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$$

Dibentuk $P' = P \cup \{c\}, P_1' = P' \cap [a,c], P_2' = P' \cap [c,b]$. Jelas bahwa bahwa $P \subset P'$ dan $P' = P_1' \cup P_2'$ dengan $P_1' = P' \cap [a,c]$ partisi pada $[a,c]$ dan $P_2' = P' \cap [c,b]$ partisi pada $[c,b]$ oleh karena itu diperoleh.

$$L(f;P) \leq L(f;P) = L(f;P_1') + L(f;P_2')$$

$$\leq U(f;P_1') + U(f;P_2') = U(f;P') \leq U(f;P)$$

Dari (i) dan (ii) diperoleh

$$\{U(f;P_1') - L(f;P_1')\} + \{U(f;P_2') - L(f;P_2')\}$$

$$= U(f;P_1') - L(f;P_1') \leq U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

Yang berakibat

$$U(f;P_1') - L(f;P_1') < \varepsilon \text{ dan } U(f;P_2') - L(f;P_2') < \varepsilon$$

Dengan kata lain terbukti bahwa $f \in \Re[a, c]$ dan $f \in \Re[c, b]$. Lebih lanjut :

$$\int_a^b f = \inf\left\{U(f;P')f;P' \in \pi[a,b]\right\}$$

$$= \inf\left\{U(f;P_1') + U(f;P_2'); P_1' \in \pi[a,c] \,\&\, P_2' \in \pi[c,b]\right\}$$

$$= \inf\left\{U(f;P_1'); P_1' \in \pi[a,c]\right\} + \inf\{U(f;P_2'); P_2' \in \pi[c,b]\}$$

$$= \int_a^c f + \int_c^b f$$

Syarat cukup : Karena $f \in \Re[a, c]$ dan $f \in \Re[c, b]$, maka nilai limit – limit di bawah ini ada

$$\int_a^c f = \lim_{\|P_1\|\to 0} S(f;P_1) \text{ dan } \int_c^b f = \lim_{\|P_2\|\to 0} S(f;P_2)$$

Dengan P_1 partisi pada $[a,c]$ dan P_2 merupakan partisi $[c,b]$. Jeals bahwa $P = P_1 \cup P_2$ partisi pada $[a,b]$. Oleh karena itu

$$\int_a^b f = \lim_{\|P\|\to 0} S(f;P)$$

$$= \lim_{\|P\|\to 0} S(f;P_1 \cup P_2)$$

$$= \lim_{\|P_1\|\to 0} S(f;P_1) + \lim_{\|P_2\|\to 0} S(f;P_2)$$

$$= \int_a^c f + \int_c^b f \,. \quad \blacksquare$$

Catatan : syarat cukup dapat dibuktikan dengan memanfaatkan bahwa fungsi f terintegral Darboux pada $[a,c]$ maupun pada $[c,b]$.

Teorema 1.1.15

Jika fungsi $f : [a, b] \to \Re$ terintegral pada $[a,b]$ serta fungsi $\varphi : [a, b] \to \Re$ kontinu pada $[a,b]$ dan $f(x) \in [c,d]$ untuk setiap $x \in [a,b]$, maka fungsi $\varphi \circ f [a, b] \to \Re$ terintegral pada $[a,b]$.

Bukti : Karena φ kontinu pada selang tertutup $[c,d]$, maka φ terbatas disana. Jadi $K = \sup\{\varphi(t); t \in [c,d]\}$ ada. Lebih lanjut, fungsi φ kontinu seragam pada $[c,d]$. Oleh karena itu untuk sembarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta_1 > 0$ sehingga jika $s,t \in [c,d]$ dan $|s-t| < \delta_1$ berakibat

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2K + b - a + 1} = \varepsilon'.$$

Diambil $\delta = \min\{\delta_1, \varepsilon'\}$. Karena fungsi *f* terintegral pada $[a,b]$, maka terdapat partisi *P* pada $[a,b]$ sehingga berlaku

$$U(f;P) - L(f;P) < \delta^2,$$

Katakan $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_k = b\}$, dan

$$m_k = \inf\{f(x); x \in |x_{k-1}, x_k\},$$
$$M_k = \sup\{f(x); x \in |x_{k-1}, x_k\}.$$
$$m_k' = \inf\{\varphi(f(x)); x \in |x_{k-1}, x_k\},$$
$$M_k' = \inf\{\varphi(f(x)); x \in |x_{k-1}, x_k\}.$$

2. SIFAT-SIFAT INTEGRAL RIEMANN

1. Sifat-sifat Dasar Integral Riemann

Proposisi 1 **(Sifat Kelinearan / Sifat Kepositifan Integral Riemann)**

Misalkan *f, g : I* → $\Re$ terintegralkan pada *I,* dan *c* ∈ $\Re$ suatu konstanta. Maka *cf* dan *f* + *g* terintegralkan pada *I* dan

1) $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

2) $\int_a^b (f + g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \div \int_a^b g(x)\,dx$

Bukti : (1) Jika c = 0, maka pernyataan tentang *cf* jelas benar. Sekarang tinjau kasus *c* > 0. (Kasus *c* < 0 serupa dan diserahkan sebagai latihan). Misalkan $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ partisi sembarang dari *I*. Karena *c* > 0, kita mempunyai

$$\inf\{cf(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\} = c \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

untuk *k* = 1, 2, . . . , *n*. Kalikan tiap suku ini dengan x_{k-1}, x_k dan jumlahkan, kita dapatkan

$$L(cf; P) = cL(f; P).$$

Jadi, karena *c* > 0, kita peroleh

$$L(cf) = \sup\{cL(f; P) \mid P \text{ partisi dari } I\} = c\sup\{L(f; P) \mid P \text{ partisi dari } I\} = cL(f).$$

Dengan cara yang serupa kita peroleh pula

$$U(cf; P) = cU(f; P)$$

dan

$$U(cf) = \inf\{cU(f;\ P) \mid P \text{ partisi dari } I\} = c\inf\{U(f;\ P) \mid P \text{ partisi dari } I\} = cU(f).$$

Karena f terintegralkan, $U(f) = L(f)$ dan akibatnya

$$L(cf) = cL(f) = cU(f) = U(cf).$$

Jadi cf terintegralkan dan

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

(2) Untuk sembarang interval $I_k = [x_{k-1},\ x_k]$ kita mempunyai

$$\inf\{f(x) \mid x \in I_k\} + \inf\{g(x) \mid x \in I_k\} \le \inf\{(f+g)(x) \mid x \in I_k\},$$

$$\sup\{(f+g)(x) \mid x \in I_k\} \le \sup\{f(x) \mid x \in I_k\} + \sup\{g(x) \mid x \in I_k\}.$$

Dari sini kita peroleh

$$L(f;\ P) + L(g;\ P) \le L(f+g;\ P)$$

dan

$$U(f+g;\ P) \le U(f;\ P) + U(g;\ P)$$

untuk sembarang partisi P dari I. Sekarang, jika $\varepsilon > 0$ diberikan, maka terdapat partisi $P_{f,\varepsilon}$ dan $P_{g,\varepsilon}$ sedemikian sehingga

$$U(f,\ P_{f,\varepsilon}) \le L(f,\ P_{f,\varepsilon}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$U(g,\ P_{g,\varepsilon}) \le L(g,\ P_{g,\varepsilon}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Akibatnya, untuk $P_\varepsilon = P_{f,\varepsilon} \cup P_{g,\varepsilon}$, kita peroleh

$$U(f+g;P_\varepsilon) \le U(f;P_\varepsilon) + U(g;P_\varepsilon) \le L(f;P) + L(g;P_\varepsilon) + \varepsilon \le L(f+g;P_\varepsilon) + \varepsilon$$

Menurut Kriteria Keterintegralan Riemann, $f + g$ terintegralkan.

Selanjutnya perhatikan bahwa dari ketaksamaan di atas, kita peroleh

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx \le U(f+g;P_\varepsilon) \le L(f;P_\varepsilon) + L(g;P_\varepsilon) + \varepsilon \le \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx + \varepsilon.$$

Sementara itu,

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \le U(f;P_\varepsilon) + U(g;P_\varepsilon) \le L(f+g;P_\varepsilon) + \varepsilon \le \int_a^b f+g)(x)\,dx + \varepsilon.$$

Dari kedua ketaksamaan ini, kita peroleh

$$\left|\int_a^b (f+g)(x)\,dx - \left(\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\right)\right| < \varepsilon$$

Karena ini berlaku untuk $\varepsilon > 0$ sembarang, kita simpulkan bahwa

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

dan bukti pun selesai.

1. Contoh : Diberikan fungsi $f(x) = 2x$ dengan $2 \leq x \leq 6$. Akan ditunjukkan bahwa $\int_0^b 2x\,dx = 2\int_0^2 x\,dx$

Jawab :

❖ $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$. Ambil $x_1^* = x_1 = \frac{2i}{n}$ maka diperoleh $f(x_1^*) = 2.\frac{2i}{n} = \frac{4i}{n}$

$\sum_{i=1}^{n} f(x_1^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n}\right)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8i}{n^2}\right) = \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{8}{n^2}\left(\frac{n^2+n}{2}\right) = \frac{8}{n^2}.\frac{n^2}{2} + \frac{8n}{2n^2} = 4 + \frac{4}{n}$

Sehingga diperoleh $\int_0^2 2x dx = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_1^*)\Delta x = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} 4 + \frac{4}{n} = 4$...........(*)

❖ $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$. Ambil $x_1^* = x_1 = \frac{2i}{n}$ maka diperoleh $f(x_1^*) = \frac{2i}{n} = \frac{2i}{n}$

$\sum_{i=1}^{n} f(x_1^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i}{n^2}\right) = \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{4}{n^2}\left(\frac{n^2+n}{2}\right) = \frac{4}{n^2}.\frac{n^2}{2} + \frac{4n}{2n^2} = 2 + \frac{2}{n}$

Sehingga diperoleh $2\int_0^2 x dx = 2\left(\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_1^*)\Delta x\right) = 2\left(\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} 2 + \frac{2}{n}\right) = 4$.........(**)

Dari persamaan (*) dan (**) dapat diperoleh bahwa $\int_0^b 2x\,dx = 2\int_0^2 x\,dx = 4$

2. Contoh : Diberikan fungsi $f(x) = 2x$ dan $g(x) = 4$ dengan $0 \leq x \leq 2$. Akan ditunjukkan bahwa

Jawab :

❖ $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$. Ambil $x_1^* = x_1 = \frac{2i}{n}$ maka diperoleh $f(x_1^*) = 2.\frac{2i}{n} + 4 = \frac{4i}{n} + 4$

$\sum_{i=1}^{n} f(x_1^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n} + 4\right)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8i}{n^2} + \frac{8}{n}\right) = \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{8}{n^2}\left(\frac{n^2+n}{2}\right) + \frac{8}{n}.n$

$= \frac{8}{n^2}.\frac{n^2}{2} + \frac{8n}{2n^2} + 8 = 4 + \frac{4}{n} + 8 = 12 + \frac{4}{n}$

Sehingga diperoleh $\int_0^2 (2x+4)dx = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_1^*)\Delta x$

$= \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} 12 + \frac{4}{n} = 12$.................(*)

❖ $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$. Ambil $x_1^* = x_1 = \frac{2i}{n}$ maka diperoleh $f(x_1^*) = 2.\frac{2i}{n} = \frac{4i}{n}$

$\sum_{i=1}^{n} f(x_1^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n}\right)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8i}{n^2}\right) = \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{8}{n^2}\left(\frac{n^2+n}{2}\right) = \frac{8}{n^2}.\frac{n^2}{2} + \frac{8n}{2n^2} = 4 + \frac{4}{n}$

Sehingga diperoleh $\int_0^2 2x dx = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_1^*)\Delta x = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} 4 + \frac{4}{n} = 4$.............(1)

❖ $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$. Ambil $x_1^* = x_1 = \frac{2i}{n}$ maka diperoleh $f(x_1^*) = 4$

$\sum_{i=1}^{n} f(x_1^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} (4)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8}{n}\right) = \frac{8}{n}1 = \frac{8}{n}n = 8$

Sehingga diperoleh $\int_0^2 4dx = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_1^*)\Delta x = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} 8 = 8$............(2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $\int_0^2 2xdx + \int_0^2 4dx = 4 + 8 = 12$.................(**)

Dari persamaan (*) dan (**) maka diperoleh bahwa $\int_0^2 (2x+4)dx = \int_0^2 2xdx + \int_0^2 4dx = 12$

Proposisi 2.

Misalkan $f : I \to \Re$ terintegralkan pada *I*. *Jika* $f(x) \geq 0$ untuk tiap $x \in I$, maka $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

Akibat 3.

Misalkan $f, g : I \to \Re$ terintegralkan pada *I*. Jika $f(x) \leq g(x)$ untuk tiap $x \in I$, maka $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Proposisi 3.

Misalkan $f : I \to \Re$ terintegralkan pada *I*. Jika *mf(x) M* untuk tiap $x \in [a, b]$, maka

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a).$$

Proposisi 4.

Misalkan $f : [a, b] \to \Re$ terbatas dan $a < c < b$. Maka, f terintegralkan pada $[a, b]$ jika dan hanya jika f terintegralkan pada $[a, c]$ dan pada $[c, b]$. Dalam hal ini,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Catatan. Bukti Proposisi 4 tidak dibahas di sini; lihat [1] bila ingin mempelajarinya.

2. Teorema Dasar Kalkulus untuk Integral Riemann

Teorema 5 (Teorema Dasar Kalkulus I).

Misalkan f terbatas pada $I = [a, b]$ dan F didefinisikan pada *I* sebagai

$$F(x) \coloneqq \int_a^b f(t)dt, \ \ x \in I$$

Maka, *F* kontinu pada *I*. Selanjutnya, jika *f* kontinu di $c \in (a, b)$, maka *F* mempunyai turunan di c dan $F^t(c) = f(c)$

Teorema 6 (Teorema Dasar Kalkulus II).

Misalkan f terintegralkan pada $I = [a, b]$. Jika $F : I \to \Re$ adalah anti-turunan dari *f* pada *I*, maka

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Bukti : Diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang, pilih partisi $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ dari *I* sedemikian sehingga

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Menurut Teorema Nilai Rata-rata (yang kita terapkan pada F), pada tiap interval $[x_{k-1}, \ x_k]$ terdapat titik $t_k \in (x_{k-1}, \ x_k)$ sedemikian sehingga

$$F(xk) - F(x_{k-1}) = (x_{k-1}, \ x_k)f(t_k).$$

Misalkan m_k dan Mk adalah infimum dan supremum dari f pada $[x_{k-1},\ x_k]$. Maka

$$m_k(x_{k-1},\ x_k) \ \leq\ F(xk) - F(x_{k-1}) \ \leq\ Mk(x_k - x_{k-1})$$

untuk tiap k = 1, 2, . . . , n. Perhatikan bahwa bila kita jumlahkan suku-suku di tengah, maka kita peroleh suatu deret teleskopis yang jumlahnya sama dengan $F(b) - F(a)$.

Karena itu, kita peroleh

$$L(f,\ P) \ \leq\ F(b) - F(a) \ \leq\ U(f,\ P)$$

Namun, kita juga mempunyai

$$L(f,\ P) \ \leq\ \int_a^b f(t)\, dt \ \leq\ U(f,\ P)$$

Akibatnya, kita peroleh

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt - |F(b) - F(a)| \right| < \varepsilon$$

Karena ini berlaku untuk $\varepsilon > 0$ sembarang, kita simpulkan bahwa

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a),$$

3. Teorema Nilai Rata-rata dan Teorema Taylor untuk Integral

Jika f kontinu pada $I = [a, b]$, maka f akan mencapai nilai maksimum M dan minimum m pada $[a, b]$. Menurut *<u>Proposisi 3</u>*, kita mempunyai

$$m(b - a) \ \leq\ \int_a^b f(x)\, dx \ \leq\ M(b - a)$$

atau

$$m \ \leq\ \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \ \leq\ M$$

Nilai $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$ disebut sebagai nilai rata-rata integral f pada interval I. (Dalam versi diskrit, nilai rata-rata aritmetik dari sejumlah bilangan adalah jumlah dari bilangan-bilangan tersebut dibagi dengan banyaknya bilangan itu. Dalam versi 'kontinu', integral menggantikan jumlah dan panjang interval menggantikan banyaknya bilangan.)

Mengingat m dan M ada di daerah nilai f dan $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$ ada di antara kedua nilai tersebut, maka menurut *<u>Teorema Nilai Antara</u>* mestilah terdapat suatu titik $c \in I$ sedemikian sehingga

$$f(c) \ =\ \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$

Fakta ini dikenal sebagai *Teorema Nilai Rata-rata* untuk integral, yang dinyatakan di bawah ini. (Ingat bahwa sebelumnya kita juga mempunyai Teorema Nilai Rata-rata untuk turunan. Dalam konteks turunan, nilai rata-rata analog dengan 'kecepatan rata-rata' dalam fisika.)

Teorema 7 (Teorema Nilai Rata-rata untuk Integral).

Jika f kontinu pada $I = [a, b]$, maka terdapat $c \in I$ sedemikian sehingga

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema 8 (Teorema Taylor untuk Integral).

Misalkan $f, f^t, \ldots, f^{(n)}$ kontinu pada $I = [a, b]$. Maka

$$f(b) = f(a) + (b-a)f^t(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + E_n$$

dengan $E_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt$

Bukti. Dengan pengintegralan parsial, kita peroleh

$$E_n = \frac{1}{(n-1)!}\left[(b-t)^{n-1}f^{(n-1)}(t)\Big|_a^b + (n-1)\int_a^b (b-t)^{n-2}f^{(n-1)}(t)\,dt\right]$$

$$= -\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-t)^{n-2}f^{(n-1)}(t)\,dt.$$

Jika kita lakukan pengintegralan parsial hingga n kali, maka kita akan sampai pada hasil di atas.

DAFTAR PUSTAKA

- Rahayu, Pipit Pratiwi. 2009. *Hand Out Kuliah Pengantar Analisis Real MAT-21414*. Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga. Yogyakarta.
- Darmawijaya, Soeparna. 2006. *Pengantar Analisis Real*. Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.