I. Tentukan pernyataan berikut ini benar atau salah.

1. Jika V ruang vektor atas F dengan θ adalah elemen identitas dari V dan 0 adalah elemen netral dari F, maka $0v = \theta$, $\forall\ v \in V$. (**Benar**)
2. Jika S dan T subruang dari V, maka $S \cap T$ subruang dari V. (**Benar**)
3. Jika S dan T subruang dari V, maka $S \cup T$ subruang dari V.(**Salah**)
4. Suatu subset tidak kosong $S \subseteq V$ merupakan subruang dari V jika dan hanya jika $(\forall\ u, v \in S)$, $u + v \in S$ dan $(\forall\ \alpha \in F)(\forall\ v \in S)$ $\alpha v \in S$. (**Benar**)
5. Jika $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ bebas linier dan merentang V, maka S basis untuk V. (**Benar**)
6. Dimensi dari ruang vektor V adalah banyaknya elemen dari suatu basis untuk V.(**Benar**)
7. Jika S dan T subruang V, maka $\dim(S + T) + \dim(S \cap T) = \dim(S) + \dim(T)$. (**Benar**)
8. Jika S dan T subruang V dengan $S \cap T = \{\theta\}$ dan $V = S + T$, maka $S \oplus T$. (**Benar**)
9. Jika $T : V \to W$ transformasi linier, maka $\mathrm{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$ subruang dari V. (**Salah**)
10. $\mathrm{Im}(T) = \{w \in W \mid (\exists\ v \in V)\ T(v) = w\} = \{T(v) \mid v \in V\}$. (**Benar**)

II. Kerjakan soal-soal berikut.

1. Diketahui $M_2(\Re) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle|\ a, b, c, d \in \Re\right\}$, ($M_2(\Re)$, +) merupakan **Grup Abelian** dan ($\Re$, +, •) merupakan **Lapangan**. Akan dibuktikan $M_2(\Re)$ merupakan **Ruang Vektor** atas $\Re$!

Bukti : ambil sebarang $k, \ell \in \Re$ dan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in M_2(\Re)$ untuk suatu $a, b, c, d, r, s, t, u \in \Re$,

❖ Adb. $(\ \forall\ A \in M_2(\Re)\ )\ (\ \forall\ k \in \Re\ )$ berlaku $k \,.\, A \in M_2(\Re)$

$k.A \;=\; k.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} \in M_2(\Re)$ karena $ka, kb, kc, kd \in \Re$ ■

❖ Adb. $(\ \forall A, B \in M_2(\Re)\ )\ (\ \forall k \in \Re\ )$ berlaku $k(A + B) = kA + kB$

$$
\begin{aligned}
k(A + B) &= k\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}\right) \\
&= k\begin{pmatrix} a+r & b+s \\ c+t & d+u \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} k(a+r) & k(b+s) \\ k(c+t) & k(d+u) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ka+kr & kb+ks \\ kc+kt & kd+ku \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kr & ks \\ kt & ku \end{pmatrix} \\
&= k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \\
&= kA + kB \qquad ■
\end{aligned}
$$

❖ Adb. $(\ \forall A \in M_2(\Re)\ )\ (\ \forall k, l \in \Re\ )$ berlaku $(k + \ell)A = kA + \ell A$

$$
\begin{aligned}
(k + \ell)A &= (k + \ell)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (k+l)a & (k+l)b \\ (k+l)c & (k+l)d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ka+la & kb+lb \\ kc+lc & kd+ld \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} la & lb \\ lc & ld \end{pmatrix} \\
&= k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= kA + \ell A \qquad ■
\end{aligned}
$$

❖ Adb. ($\forall A \in M_2(\Re)$) ($\forall k, l \in \Re$) berlaku $(k\ell)A = k(\ell A)$

$$(k\ell)A = (k\ell)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (kl)a & (kl)b \\ (kl)c & (kl)d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k(la) & k(lb) \\ k(lc) & k(ld) \end{pmatrix}$$

$$= k\begin{pmatrix} la & lb \\ lc & ld \end{pmatrix}$$

$$= k\left(l\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

$$= k(\ell A) \quad \blacksquare$$

❖ Adb. ($\forall A \in M_2(\Re)$) berlaku $1 . A = A$

$$1 . A = 1\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a & 1b \\ 1c & 1d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A \quad \blacksquare$$

∴ Jadi $M_2(\Re)$ adalah **Ruang Vektor** atas $\Re$.

2. **a)** Diketahui $\Re^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \Re\}$ **Ruang Vektor** atas $\Re$. $S \subseteq \Re^2$ dan $T \subseteq \Re^2$.
$S = \{ (a, a) \mid a \in \Re\}$ dan $T = \{ (2b, -3b) \mid b \in \Re\}$. Akan dibuktikan $\boldsymbol{\Re^2 = S \oplus T}$

Bukti :

Akan dibuktikan bahwa S **Subruang** dari $\Re^2$

- Diketahui $S \subseteq \Re^2$
- $S \neq \phi$ karena terdapat $(0, 0) \in S$
- Ambil sebarang $u = (a, a)$, $v = (b, b) \in S$ untuk suatu $a, b \in \Re$ dan $\forall \alpha \in \Re$
  - ✓ $u + v = (a, a) + (b, b) = (a + b, a + b) \in S$ karena $a + b \in \Re$ sebab $a, b \in \Re$

- ✓ $\alpha \,.\, u = \alpha(a, a) = (\alpha a, \alpha a) \in$ S karena $\alpha a \in \Re$ sebab $a, \alpha \in \Re$

$\therefore$ *S* **Subruang** dari $\Re^2$ ■

- Akan dibuktikan bahwa *T* **Subruang** dari $\Re^2$
  - Diketahui $T \subseteq \Re^2$
  - $T \neq \phi$ karena terdapat $(0, 0) \in T$
  - Ambil sebarang $x = (2b, -3b)$, $y = (2c, -3c) \in$ T untuk suatu $b, c \in \Re$ dan $\forall\ \alpha \in \Re$
    - ✓ $x + y = (2b, -3b) + (2c, -3c)$
      $= (2b + 2c,\ -3b + (-3c))$
      $= (2(b + c),\ -3(b + c)) \in T$ karena $b + c \in \Re$ sebab $b, c \in \Re$
    - ✓ $\alpha \,.\, x = \alpha(2b,\ -3b)$
      $= (\alpha.2b,\ \alpha.(-3b))$
      $= (2(\alpha b),\ -3(\alpha b)) \in T$ karena $\alpha b \in \Re$ sebab $\alpha, b \in \Re$

$\therefore$ *T* **Subruang** dari $\Re^2$ ■

- Akan dibuktikan $\Re^2 = S + T$ ($\Re^2 \subseteq S + T$ dan $S + T \subseteq \Re$)
  - Jelas bahwa $\Re^2 \subseteq S + T$
  - Adb. $S + T \subseteq \Re^2$?

    Ambil sebarang $x \in S + T$ maka $x = (a, a) + (2b, -3b)$ dimana $(a,\ a) \in S$ dan $(2b,\ -3b) \in T$ untuk suatu $a, b \in \Re$.

    $(a,\ a) + (2b,\ -3b) = (a + 2b,\ a + (-3b)) = (a + 2b,\ a - 3b) \in \Re^2$ karena $a + 2b,\ \ a - 3b \in \Re$.

  $\therefore$ Jadi $\forall\ x \in S + T \ \Rightarrow\ x \in \Re^2$

  $S + T \ \subseteq\ \Re^2$ ■

- Akan dibuktikan $S \cap T = \{0\}$

  Ambil sebarang $(x, y) \in S \cap T$,

$S \cap T = \{(x, y) \mid (x, y) \in S \;\wedge\; (x, y) \in T\}$

$= \{(x, y) \mid x = a$ dan $y = a$ untuk suatu $a \in \Re \;\wedge\; x = 2b$ dan $y = -3b$ untuk suatu $b \in \Re\}$

$= \{(x, y) \mid 2b = a$ dan $-3b = a$ untuk suatu $a, b \in \Re\}$

$= \{ (x,\ y) \mid a = b = 0 \; sehingga \; x = y = 0 \}$

$= \{ (0, 0) \}$ ■

∴ Jadi terbukti bahwa $\Re^2 = \boldsymbol{S} \oplus \boldsymbol{T}$

b) Akan dibuktikan bahwa $B = \{ (1, 1), (2, -3) \}$ **Basis** untuk $\Re^2$?

Bukti :

- Akan dibuktikan B **Bebas Linier** ?

$\alpha_1(1, 1) + \alpha_2(2, -3) = (0, 0)$

$(\alpha_1, \alpha_1) + (2\alpha_2, -3\alpha_2) = (0, 0)$

$(\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha 1 - 3\alpha_2) = (0, 0)$

$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$ sehingga $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0$

$\alpha 1 - 3\alpha_2 = 0$ $-$

$5\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 = 0$

∴ Jadi karena diperoleh $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ maka B **Bebas Linier**.

- Akan dibuktikan B **Membangun** $\Re^2$?

Ambil sebarang $(x, y) \in \Re^2$ untuk suatu $a, b \in \Re$

$\alpha_1(1, 1) + \alpha_2(2, -3) = (x, y)$

$(\alpha_1, \alpha_1) + (2\alpha_2, -3\alpha_2) = (x, y)$

$(\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha 1 - 3\alpha_2) = (x, y)$

$\alpha_1 + 2\alpha_2 = x$

$\alpha 1 - 3\alpha_2 = y$ $-$

$5\alpha_2 = x - y \Leftrightarrow \alpha_2 = \frac{x-y}{5}$

$\alpha_1 + 2\alpha_2 = x$

$\alpha_1 + 2\left(\frac{x-y}{5}\right) = x$

$\alpha_1 + \frac{2x-2y}{5} = x$

$\frac{5\alpha_1 + 2x - 2y}{5} = x$

$5\alpha_1 + 2x - 2y = 5x$

$5\alpha_1 = 5x - 2x + 2y$

$\alpha_1 = \frac{5x-2x+2y}{5} = \frac{3x+2y}{5}$

∴ Jadi dengan $\alpha_1 = \frac{3x+2y}{5}$ dan $\alpha_2 = \frac{x-y}{5}$ dimana

$\frac{3x+2y}{5}(1,\ 1) + \frac{x-y}{5}(2, -3) = (x,\ y)$. Maka B **Membangun** $\Re^2$. ■

$\therefore$ Jadi karena B **Bebas Linier** dan **Membangun** $\Re^2$ maka B merupakan **Basis** untuk $\Re^2$.

3. Diberikan V dan W **Ruang Vektor** atas F dengan θ_v dan θ_w berturut-turut adalah elemen identitas dari V dan W

   a) Definisi $T : V \rightarrow W$ sebagai **Transformasi Linier**.

   Diberikan V dan W **Ruang Vektor** atas F, fungsi $T : V \rightarrow W$ dikatakan sebagai **Transformasi Linier** jika sebarang $u, \nu \in V$ dan $\alpha \in F$ sehingga berlaku

   - $T(u + \nu) = T(u) + T(\nu)$
   - $T(\alpha \,.\, u) = \alpha \,.\, T(u)$

   b) Akan dibuktikan $T(\theta_v) = \theta_w$?

   Bukti : ambil sebarang $\nu \in V$

   $T(\theta_v) = T(0 \,.\, \nu)$ dengan $0 \in F$

   $= 0 \,.\, T(\nu)$

   $= \theta_w$ ■

   c) Akan dibuktikan $Ker(\ T\ ) = \{\ \nu \in V \mid T(\nu) = \theta_w\ \}$ **Subruang** dari V ?

   Bukti :

   - Jelas bahwa $Ker(\ T\ ) \subseteq V$
   - $Ker(\ T\ ) \neq \phi$ karena terdapat $\theta_v \in Ker(\ T\ )$ dimana $T(\theta_v) = \theta_w$
   - Ambil sebarang $u, \nu \in Ker(\ T\ )$ maka $T(u) = T(\nu) = \theta_w$ dan $\forall\ \alpha \in F$,
     - ✓ $T(u + \nu) = T(u) + T(\nu) = \theta_w + \theta_w = \theta_w$

       Akibatnya $u + \nu \in Ker(\ T\ )$
     - ✓ $T(\alpha \,.\, u) = \alpha T(u) = \alpha \,.\, \theta_w = \theta_w$

       Akibatnya $\alpha \,.\, u \in Ker(\ T\ )$

$\therefore$ Jadi terbukti bahwa $Ker(\ T\ )$ **Subruang** dari V.

4. Diberikan $\Re^3$ dan $\Re^2$ **Ruang Vektor** atas $\Re$.

   $T : \Re^3 \rightarrow \Re^2$ dengan $T((x, y, z)) = (x - y,\ y - z\ )$

   Akan dibuktikan bahwa T merupakan **Transformasi Linier** ?

Bukti : Ambil sebarang $u = (x, y, z)$, $v = (r, s, t) \in \Re^3$ untuk suatu $x, y, z, r, s, t \in \Re$ dan $\forall\ \alpha \in \Re$,

✓ $$\begin{aligned} T(u + v) &= T((x, y, z) + (r, s, t)) \\ &= T((x + r,\ y + s,\ z + t)) \\ &= ((x + r) - (y + s),\ (y + s) - (z + t)) \\ &= (x + r - y - s,\ y + s - z - t) \\ &= ((x - y) + (r - s),\ (y - z) + (s - t)) \\ &= (x - y,\ y - z) + (r - s,\ s - t) \\ &= T((x, y, z)) + T((r, s, t)) \\ &= T(u) + T(v) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

✓ $$\begin{aligned} T(\alpha . u) &= T(\alpha(x, y, z)) \\ &= T((\alpha x,\ \alpha y,\ \alpha z)) \\ &= (\alpha x - \alpha y,\ \alpha y - \alpha z) \\ &= (\alpha(x - y),\ \alpha(y - z)) \\ &= \alpha(x - y,\ y - z) \\ &= \alpha . T(u) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

∴ Jadi T merupakan **Transformasi Linier**.